整数$a_n = 19^n + \ -1\ ^{n-1} \cdot 2^{2n-3}$　$(n = 1, 2, 3, \cdots)$のすべてを割り切る素数を求めよ。

（1986 年東京工業大）

少し時間をとって考えてみてほしいです。

まず今回の問題は，
任意のnについて，①を割り切る素数を求めよという**任意性に着目した問題**です。
任意系の問題では何をやったらいいかわからず，なんにも手がつかない。
というようなことがとても多いように感じています。実際何から手を付ければよいかよくわからなかった方もいるのではないでしょうか。

ですがそんな任意性の問題を突破する鍵は確かに存在します。
考え方の方針を立てづらいこの問題を突破するにどう考えるとよいか・・・・。
それではそろそろ解答に移っていきましょう。

任意性問題を解くための鍵・方針，それは任意の〜という言葉の意味を考えると浮かび上がります。

“任意の〜について問題”の鉄則は，

1）任意のnについて成り立つのだから，特定のnについても成り立つ(必要条件)。

このことを利用し，条件・範囲を絞り込んだり予想を立てたりする。

2）1)で発見した内容が任意の(すべての)nで成り立つことを証明する。

です。

解答を確認しましょう。

$a_n = 19^n + \;\; -1^{\;\; n-1} 2^{2n-3}$ （$n = 1, 2, 3, \cdots$）について，

実際に計算すると，$a_1 = 21, a_2 = 329$ なので両方を割り切る素数があるとすればそれは

7 でしかないことがわかる。（必要条件）
よって，

$$a_n = 19^n + \;\; -1^{\;\; n-1} 2^{2n-3} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

のすべてを割り切る素数は 7 であると予想できる。この予想が正しいことを以下に示す。

$$a_n = 19^n + 2 \;\; -16^{\;\; n-1} = \;\; 7 \cdot 5 - 16^{\;\; n} + 2 \;\; -16^{\;\; n-1}$$

と変形でき，$\;\; 7 \cdot 5 - 16^{\;\; n}$ は二項定理より，適当な自然数 M を用いて $7M + \;\; -16^{\;\; n}$

と表せるから，

$$\begin{aligned} a_n &= 7M + \;\; -16^{\;\; n} + 2 \;\; -16^{\;\; n-1} \\ &= 7M + \;\; -16 + 2^{\;\; n-1} \;\; -16^{\;\; n-1} \\ &= 7M - 7 \cdot 2 \;\; -16^{\;\; n-1} \\ &= 7 \;\;\; M - 2 \;\; -16^{\;\; n-1} \end{aligned}$$

となる。

これにより a_n は任意の自然数 n について 7 の倍数であるから，7 はすべての n に対して，

a_n を割り切る。（十分条件）

よって，　答えは 7

任意問題を最初からいきなり解くことは難しいですが，先ほど挙げたように考えるべき核の部分を理解し,知っていると手が付きます。入試では難易度が高い大学で出題されるイメージですがとても差がつく問題だと思います。
このように数学でも解法について知っておくべき知識があります。
そんな知識を学ぶべき場が塾であり予備校でありそれらを提供することが僕たち講師の役目だと思っています。